

Leçon 213 : Espaces de Hilbert. Exemples d'applications.

1 Généralités (Hirsch-Lacombe)

1.1 Définitions, propriétés élémentaires

- Définition espace pré-hilbertien + exemples
- Inégalité de Schwarz + corollaire sur la norme
- Forme linéaire qui dérive du produit scalaire
- Identité du parallélogramme
- Orthogonal d'un élément/d'une partie

1.2 Hilbert

- Définition de Hilbert + exemples
- Tout ceux en dim fini

2 Théorème de projection et conséquences (Hirsch-Lacombe)

2.1 Le théorème

- Dév 1 : Théorème de projection
- Corollaire sur les propriétés de l'orthogonal d'un sous ev fermé
- Application : Montrer qu'une famille est une base hilbertienne

2.2 Théorème de représentation de Riesz

- Théorème

- Les formes linéaires sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
- Existence de l'adjoint

3 Bases Hilbertiennes (Hirsch-Lacombe)

- Définition famille orthogonales/orthonormales/hilbertienne
- Dév 2 : Espace de Bergman
- Projection orthogonale
- Bessel-Parseval
- Théorème sur la decomposition d'un élément en fonction de la base hilbertienne + exemple des coeffs de Fourier
- Procédé de Schmidt
- Unicité du Hilbert séparable de dim infinie à isométrie près

4 Applications

4.1 Théorème de Shanon (Hirsch-Lacombe)

- Théorème
- Interprétation

4.2 Séries de Fourier (Beck)

- $L^2(\mathbb{T})$ est un Hilbert
- Famille totale
- Application à $\zeta(2)$ et $\zeta(4)$